サンプル1　指数関数・対数関数 (対数関数その2) 問題

$\boxed{1}$ 自然数 $m,\ n$ と $0<a<1$ を満たす実数 a を, 等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる. 以下の各問に答えよ.

(1) 自然数 $m,\ n$ を求めよ.

(2) 不等式 $a > \dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ. (大阪大)

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ.

(1) t が $t>1$ の範囲を動くとき, 関数 $f(t) = \log_2 t + \log_t 4$ の最小値を求めよ.

(2) $t>1$ なるすべての t に対して, 不等式

$$k \log_2 t < (\log_2 t)^2 - \log_2 t + 2$$

が成り立つような k の範囲を求めよ. (北海道大)

$\boxed{3}$ 正の実数 $x,\ y$ が $xy=100$ を満たすとき, $(\log_{10} x)^3 + (\log_{10} y)^3$ の最小値, およびそのときの $x,\ y$ の値を求めよ. (広島大)

$\boxed{4}$ $ab=100$ で, $f(x) = \left(\log_{10} \dfrac{x}{a}\right)\left(\log_{10} \dfrac{x}{b}\right)$ の最小値は $-\dfrac{1}{4}$ であるという. このような正の数 $a,\ b$ を求めよ.

$\boxed{5}$ $a>1,\ b>1,\ (\log_2 a)(\log_2 b) = 1$ のとき, $\log_2 ab$ の最小値を求めよ.

$\boxed{6}$ a を $a > \dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする. $1 \leqq x \leqq 2a$ のとき, $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{a}\right)\left(\log_2 \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ. (早稲田大)

$\boxed{7}$ 不等式 $\log_x y + 6\log_y x < 5$ を満足する $x,\ y$ を座標とする点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ.

サンプル1　指数関数・対数関数（対数関数その2）解答

$\boxed{1}$ 自然数 $m,\ n$ と $0<a<1$ を満たす実数 a を, 等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる. 以下の各問に答えよ.

(1) 自然数 $m,\ n$ を求めよ.

(2) 不等式 $a > \dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ. (大阪大)

(解) (1) $n \geqq 1,\ 0<a<1$ より,

$$1 \leqq n < n+a < n+1$$

ゆえ,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+a} < \frac{1}{n} \leqq 1$$

である. すなわち, $\log_2 6$ の整数部分が m である. ここで,

$$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \Leftrightarrow 2 < \log_2 6 < 3$$

であるから, $m=2$ を得る. このとき,

$$\frac{1}{n+a} = \log_2 6 - 2 = \log_2 6 - \log_2 4 = \log_2 \frac{3}{2}$$

とできる. ここで, $2^{\frac{1}{2}} < \dfrac{3}{2} < 1$ より,

$$\frac{1}{2} < \log_2 \frac{3}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{n+a} < 1$$

であるから, $1 < n+a < 2$ となる. $0<a<1$ ゆえ, $n+a$ の整数部分が n であることより, $n=1$ を得る. 以上より, $\underline{m=2,\ n=1}$ である. □

(2) (1) より, $\dfrac{1}{1+a} = \log_2 \dfrac{3}{2}$ であり, 底の変換公式の逆から,

$$1+a = \log_{\frac{3}{2}} 2 \Leftrightarrow a = \log_{\frac{3}{2}} 2 - \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$$

とできる. 一方で,

$$\frac{2}{3} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

である. ここで, 真数が正であることに注意して,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}, \quad \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

である. $\dfrac{64}{27} > \dfrac{9}{4}$ であるゆえ, $\dfrac{4}{3} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ とできる. $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ は単調増加であることから, この両辺に対数をとっても大小関係は変わらず, $a > \dfrac{2}{3}$ を得る. □

(補足：(2) で「底の変換公式の逆」と記述した箇所について, 一般に対数の底と真数を入れ替えると, 逆数になる.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

これは準公式として, 知っておくとよい)

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ.

(1) t が $t > 1$ の範囲を動くとき, 関数 $f(t) = \log_2 t + \log_t 4$ の最小値を求めよ.

(2) $t > 1$ なるすべての t に対して, 不等式

$$k \log_2 t < (\log_2 t)^2 - \log_2 t + 2$$

が成り立つような k の範囲を求めよ. (北海道大)

(解) (1) 底の変換公式より,

$$f(t) = \log_2 t + \frac{\log_2 4}{\log_2 t} = \log_2 t + \frac{2}{\log_2 t}$$

とできる. ここで, $t > 1$ ゆえ, $\log_2 t > 0$ であるから, 相加・相乗平均の関係より,

$$f(t) = \log_2 t + \frac{2}{\log_2 t} \geqq 2\sqrt{\log_2 t \times \frac{2}{\log_2 t}} = 2\sqrt{2}$$

である. 等号成立条件は,

$$\log_2 t = \frac{2}{\log_2 t}$$

であり, これを解くと,

$$\log_2 t = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = 2^{\sqrt{2}} > 1$$

となる. したがって, 求める最小値は, $\underline{2\sqrt{2}}$ である. □

(2) $\log_2 t = x$ とおく. このとき, $t > 1$ ゆえ, $x > 0$ である. ここで,

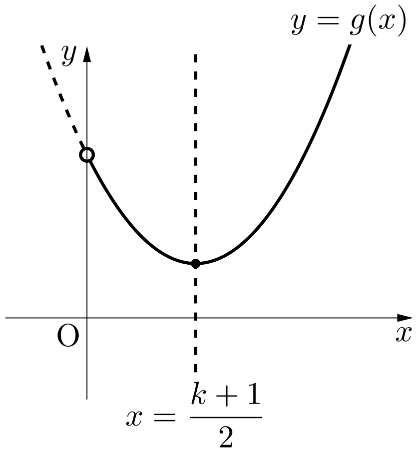
$$g(x) = (\log_2 t)^2 - \log_2 t + 2 - k \log_2 t = x^2 - (k+1)x + 2$$

とおく. これを平方完成して,

$$g(x) = \left(x - \frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{(k+1)^2}{4} + 2 = \left(x - \frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{k^2 + 2k - 7}{4}$$

とできる.

(i) $\frac{k+1}{2} \geqq 0 \Leftrightarrow k \geqq -1$ のとき

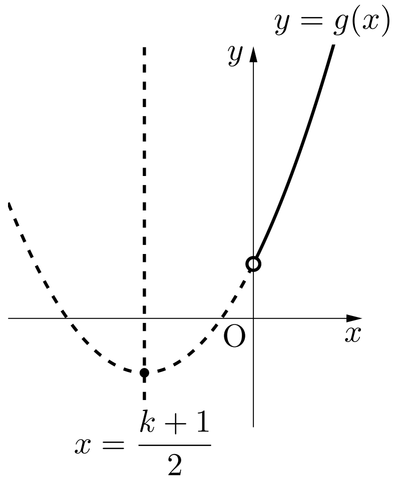


上図より, $x>0$ において $g(x)>0$ となる条件は,

$$g\left(\frac{k+1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow -\frac{k^2+2k-7}{4}>0 \Leftrightarrow k^2+2k-7<0 \Leftrightarrow -1-2\sqrt{2}<a<-1+2\sqrt{2}$$

である. ゆえに, $-1 \leqq k < -1+2\sqrt{2}$ を得る.

(ii) $\dfrac{k+1}{2}<0 \Leftrightarrow k<-1$ のとき



上図より, $x>0$ において $g(x)>0$ となる条件は, $g(0) \geqq 0$ であるが, $g(0)=2$ より, これは常に成り立つ. ゆえに, $k<-1$ を得る.

以上より, 求める k の値の範囲は, $\underline{k<-1+2\sqrt{2}}$ である. □

(補足：この問題は「指数関数」大問 8 の類題となっている. (2) の (i) は判別式 $D<0$ と考えて立式してもよいだろう. なお, (2) は両辺を $\log_2 t$ で割って, (1) の形に帰着する解法もある)

$\boxed{3}$ 正の実数 $x,\ y$ が $xy=100$ を満たすとき, $(\log_{10} x)^3+(\log_{10} y)^3$ の最小値, およびそのときの $x,\ y$ の値を求めよ. (広島大)

(解) $x>0,\ y>0$ より, $xy>0$ であるから, 両辺の底を 10 とする対数をとると,

$$\log_{10} xy=\log_{10} 100 \Leftrightarrow \log_{10} x+\log_{10} y=2$$

となる. ここで, $\log_{10} x=X,\ \log_{10} y=Y$ とおくと,

$$X+Y=2 \Leftrightarrow Y=2-X$$

であり,

$$(\log_{10} x)^3+(\log_{10} y)^3=X^3+Y^3=X^3+(2-X)^3=6X^2-12X+8=6(X-1)^2+2$$

と平方完成できる. これは $X=1$ のとき, 最小値 2 をとる. このとき, $Y=1$ であり,

$$\log_{10} x=1,\ \log_{10} y=1 \Leftrightarrow x=10,\ y=10$$

ゆえ, 最小値：$\underline{10}$, $(x,\ y)=\underline{(10,\ 10)}$ を得る. □

$\boxed{4}$ $ab=100$ で, $f(x)=\left(\log_{10}\dfrac{x}{a}\right)\left(\log_{10}\dfrac{x}{b}\right)$ の最小値は $-\dfrac{1}{4}$ であるという. このような正の数 $a,\ b$ を求めよ.

(解) $a>0,\ b>0$ より, $ab>0$ であるから, 両辺の底を 10 とする対数をとると,

$$\log_{10} ab=\log_{10} 100 \Leftrightarrow \log_{10} a+\log_{10} b=2 \ \cdots ①$$

となる. ここで,

$$f(x)=(\log_{10}x-\log_{10}a)(\log_{10}x-\log_{10}b)=(\log_{10}x)^2-(\log_{10}a+\log_{10}b)\log_{10}x+\log_{10}a\log_{10}b$$

であり, これを平方完成すると,

$$f(x)=\left(\log_{10}x-\frac{1}{2}\log_{10}ab\right)^2-\frac{1}{4}(\log_{10}ab)^2+\log_{10}a\log_{10}b$$

とできる. $ab=100$ より,

$$f(x)=(\log_{10}x-1)^2+\log_{10}a\log_{10}b-1$$

を得る. これは, $\log_{10}x=1\Leftrightarrow x=10$ のとき, 最小値 $\log_{10}a\log_{10}b-1$ をとる. ゆえに,

$$\log_{10}a\log_{10}b-1=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\log_{10}a\log_{10}b=\frac{3}{4}\quad\cdots②$$

である. ①, ② より, $\log_{10}a,\ \log_{10}b$ は t の 2 次方程式 $t^2-2t+\dfrac{3}{4}=0$ の 2 解であり,

$$4t^2-8t+3=0\Leftrightarrow(2t-1)(2t-3)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

より,

$$(\log_{10}a,\ \log_{10}b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow(a,\ b)=\underline{\left(10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{3}{2}}\right),\ \left(10^{\frac{3}{2}},\ 10^{\frac{1}{2}}\right)}$$

を得る. □

$\boxed{5}$ $a>1,\ b>1,\ (\log_2a)(\log_2b)=1$ のとき, $\log_2ab$ の最小値を求めよ.

(解) $\log_2a=A,\ \log_2b=B$ とおき, $k=(\log_2a)(\log_2b)$ とおく. このとき,

$$(\log_2a)(\log_2b)=1,\ k=(\log_2a)(\log_2b)\Leftrightarrow AB=1,\ A+B=k$$

である. また, $a>1,\ b>1$ であり, $y=\log_2x$ が単調増加であるゆえ, $A>0,\ B>0$ である. ここで, $A,\ B$ は x の 2 次方程式 $f(x)=x^2-kx+1=0$ の 2 解である. これらがともに正となる条件は, 判別式を D として,

$$\begin{cases}k^2-4\geqq0\Leftrightarrow k\leqq-2,\ 2\leqq k\\ x=\dfrac{k}{2}>0\Leftrightarrow k>0\\ f(0)=1>0\end{cases}$$

である. したがって, $k\geqq2$ より, $\log_2ab$ の最小値は $\underline{2}$ である. □

(補足：この問題のように解の配置問題に帰着できる場合, 判別式・軸・端点を考えるのが定石だが, 「2 解がともに正」「2 解がともに負」「2 解が異符号」「2 解がともに 1 より大きい」といった対称性のある条件の場合, 判別式・解と係数の関係を考える解法が有用であることも押さえておこう. 今回の場合,

$$k^2-4\geqq0,\quad A+B=k>0,\quad AB=1>0$$

である. 一般に 2 次方程式の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とするとき,

$$2\text{ 解がともに正}\Leftrightarrow D\geqq0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$
$$2\text{ 解がともに負}\Leftrightarrow D\geqq0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$$

$$2\text{ 解が異符号} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$$
$$2\text{ 解がともに } 1 \text{ より大きい} \Leftrightarrow D \geqq 0,\ (\alpha-1)+(\beta-1)>0,\ (\alpha-1)(\beta-1)>0$$

とできる)

$\boxed{6}$ a を $a > \dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする. $1 \leqq x \leqq 2a$ のとき, $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{a}\right)\left(\log_2 \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ. (早稲田大)

(解) $\log_2 \dfrac{x}{a} = t$ とおくと,

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{a}\right)\left\{\log_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} = \left(\log_2 \frac{x}{a}\right)\cdot 2\left(\log_2 \frac{x}{a}\right) = 2\left(\log_2 \frac{x}{a}\right)^2 = 2t^2$$

である. ここで,

$$1 \leqq x \leqq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leqq \frac{x}{a} \leqq 2$$

であり, $a > \dfrac{1}{2}$ ゆえ, 各辺は正なので, 底を 2 とする対数をとると,

$$\log_2 \frac{1}{a} \leqq \log_2 \frac{x}{a} \leqq \log_2 2 \Leftrightarrow -\log_2 a \leqq t \leqq 1$$

である. 最大値については以下の場合分けが考えられる.

(i) $-\log_2 a \leqq -1 \Leftrightarrow \log_2 a \geqq 1 \Leftrightarrow a \geqq 2$ のとき
左下図より, y は,

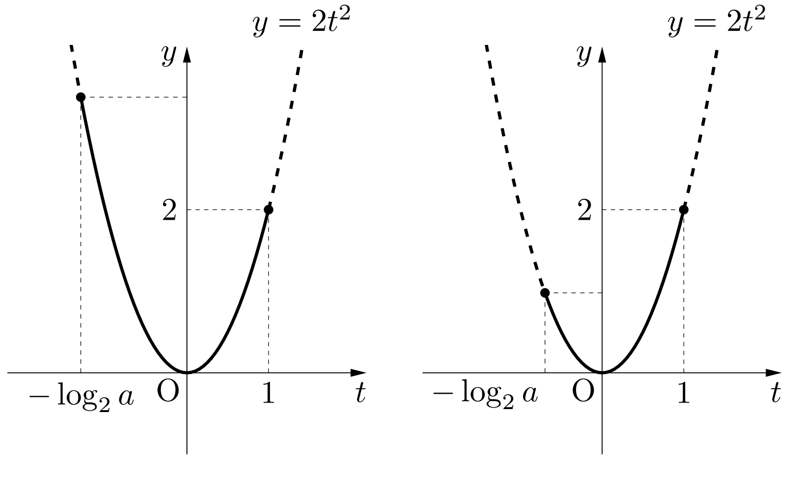
$$t = -\log_2 a \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{a} = \log_2 \frac{1}{a} \Leftrightarrow x = 1$$

で, 最大値 $2(-\log_2 a)^2 = 2(\log_2 a)^2$ をとる.

(ii) $-\log_2 a > -1 \Leftrightarrow \log_2 a < 1 \Leftrightarrow a < 2$, すなわち $\dfrac{1}{2} < a < 2$ のとき
右下図より, y は,

$$t = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{a} = \log_2 2 \Leftrightarrow x = 2a$$

で, 最大値 2 をとる.



次に, 最小値については以下の場合分けが考えられる.

(i) $-\log_2 a \leqq 0 \Leftrightarrow \log_2 a \geqq 0 \Leftrightarrow a \geqq 1$ のとき
左下図より, y は,

$$t = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{a} = \log_2 1 \Leftrightarrow x = a$$

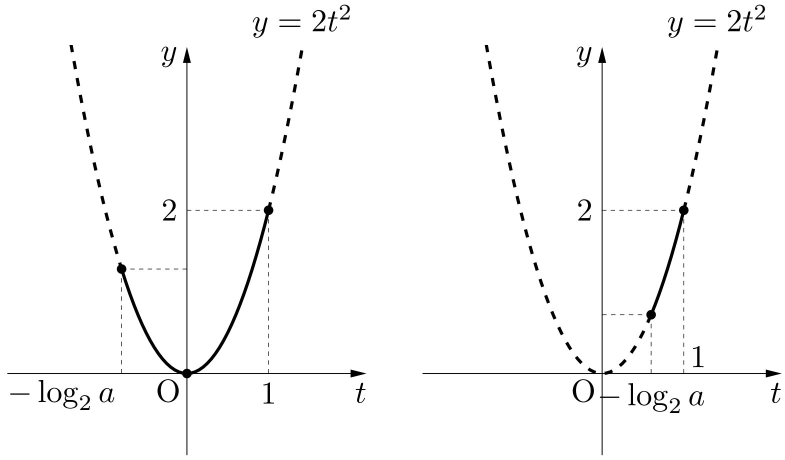
で, 最小値 0 をとる.

(ii) $-\log_2 a > 0 \Leftrightarrow \log_2 a < 0 \Leftrightarrow a < 1$, すなわち $\dfrac{1}{2} < a < 1$ のとき

右下図より, y は,

$$t = -\log_2 a \Leftrightarrow x = 1 \text{ (最大値の場合分け (i) と同様)}$$

で, 最小値 $2(-\log_2 a)^2 = 2(\log_2 a)^2$ をとる.



以上より,

$$\text{最大値}\begin{cases} a \geqq 2 \text{ のとき}, \ 2(\log_2 a)^2 \quad (x=1) \\ \dfrac{1}{2} < a < 2 \text{ のとき}, \ 2 \quad (x = 2a) \end{cases}, \quad \text{最小値}\begin{cases} a \geqq 1 \text{ のとき}, \ 0 \quad (x=a) \\ \dfrac{1}{2} < a < 1 \text{ のとき}, \ 2(\log_2 a)^2 \quad (x = 1) \end{cases}$$

である. □

$\boxed{7}$ 不等式 $\log_x y + 6\log_y x < 5$ を満足する $x,\ y$ を座標とする点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ.

(解) 底条件, 真数条件より,

$$x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1$$

である. ここで,

$$\log_x y + 6\log_y x - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 6}{\log_x y} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_x y - 2)(\log_x y - 3)}{\log_x y} < 0$$

とできる. この式の両辺に $(\log_x y)^2$ (> 0) をかけて,

$$\log_x y(\log_x y - 2)(\log_x y - 3) < 0$$

を得る. ここで, $\log_x y > \log_x y - 2 > \log_x y - 3$ であり, $\log_x y,\ \log_x y - 2,\ \log_x y - 3$ の積が負になるのは, これらが (負, 負, 負), (正, 正, 負) となるときであることを踏まえ,

$$\log_x y < 0 \text{ または「}\log_x y - 2 > 0 \text{ かつ } \log_x y - 3 < 0\text{」} \Leftrightarrow \log_x y < 0,\ 2 < \log_x y < 3$$

である. すなわち,

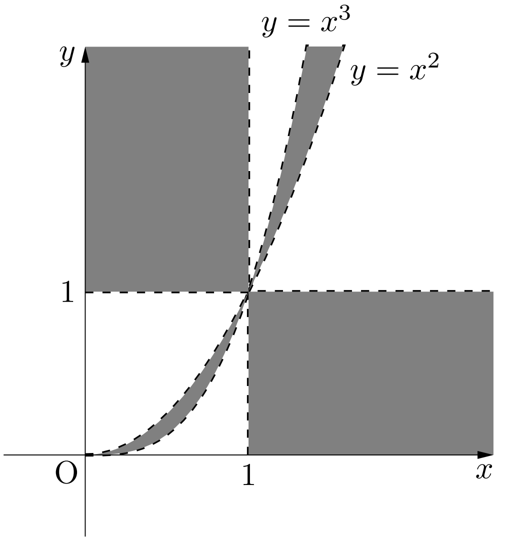
$$\log_x y < \log_x 1,\ \log_x x^2 < \log_x y < \log_x x^3$$

であり,

$$0 < x < 1 \text{ のとき}, y > 1,\ x^2 > y > x^3$$

$$x > 1 \text{ のとき}, \ y < 1, \ x^2 < y < x^3$$

である. これと $y > 0, \ y \neq 1$ を合わせて図示すると, 以下の通り. ただし, 境界は含まない. □



(補足：分数不等式 $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geqq 0$ は, 両辺に分母の 2 乗をかけるのが定石である. ただしこの際, 分母が 0 でないことに注意しなければならない. なお, 答案では $\log_x y(\log_x y - 2)(\log_x y - 3) < 0$ の計算を場合分けで処理しているが, 3 次関数のグラフの形を既習であれば, このステップは省略できよう)

サンプル2　平面ベクトル（位置ベクトルその1）問題

$\boxed{1}$ $\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とする. $\triangle$ABC の内部に点 O をとり, 線分 OA, OB, OC の中点をそれぞれ G, H, I とするとき, 3 直線 DG, EH, FI は 1 点で交わることを示せ.

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ が成立しているとする. 以下の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ.

(2) $\angle$A の大きさを求めよ. (京都大)

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC の辺 AB, AC の延長上に, 点 D, E をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるようにとり, 線分 BE と CD の交点を F とする. また, 直線 AF と線分 BC, DE との交点をそれぞれ P, Q とする. 以下の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ.

(3) $\triangle$ADQ の面積は $\triangle$ABP の面積の何倍か. (防衛大・改)

$\boxed{4}$ 以下の各問に答えよ.

(1) 平面上に原点 O から出る相異なる 2 本の半直線 OX, OY ($\angle$XOY $< 90^\circ$) があり, それぞれの上に O と異なる 2 点 A, B をとる. 点 A から OB 上に下ろした垂線の足を H とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ.

(2) 鋭角 3 角形 OPQ において, $\mathrm{OP}=3,\ \mathrm{OQ}=4,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=7$ とする. また, 点 P から辺 OQ に下ろした垂線の足を R とする. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を用いて表せ.

$\boxed{5}$ $\triangle$OAB において, $\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{OB}=1,\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする. 辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし, B から OP に垂線 BQ を引き, BQ の延長と OA との交点を R とする. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ.

(2) OR : RA を求めよ.

サンプル2　平面ベクトル（位置ベクトルその1）解答

$\boxed{1}$ △ABC の辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とする. △ABC の内部に点 O をとり, 線分 OA, OB, OC の中点をそれぞれ G, H, I とするとき, 3 直線 DG, EH, FI は 1 点で交わることを示せ.

(解) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする. このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{\vec{c}}{2}$$

である. ここで線分 DG, EH, FI の中点をそれぞれ P, Q, R とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OI}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

であり, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ がわかる. すなわち, 線分 DG, EH, FI の各中点が一致することから題意が示される. □

(補足：点の一致を証明する際は, それらの位置ベクトルが一致することを示せばよい. この考え方を共点条件という)

$\boxed{2}$ △ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ が成立しているとする. 以下の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ.

(2) ∠A の大きさを求めよ. (京都大)

(解) (1) O は △ABC の外心ゆえ, 各辺の垂直 2 等分線の交点であり, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

とできる. これらを与式に代入して,

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}) + 2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + 3\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \vec{0} \Leftrightarrow \underline{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}}$$

を得る. □

(2) (1) の結果より, $-5\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である. この両辺を 2 乗して,

$$25|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 24\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 9|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

とできる. ここで $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ を代入して整理すると, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ を得る. ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \neq \vec{0}$ ゆえ, $\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$ がわかる. 一方で, (1) の結果より,

$$5\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 4(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}})$$
$$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 4\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{7}{12}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}$$

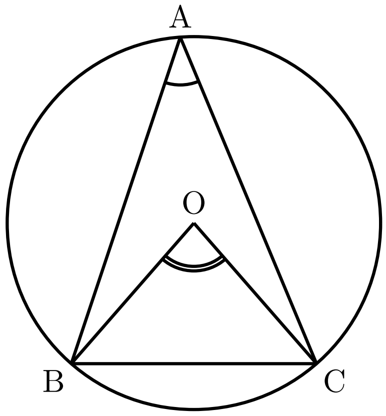
とできるので, 点 O は, 線分 BC を 3 : 4 に内分する点を D として, 線分 AD を 7 : 5 に内分する点であ

る. すなわち, O は $\triangle$ABC の内部の点である. ここで $\angle$A は弧 BC に対する円周角であるから,

$$\angle \mathrm{A} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BOC} = \underline{45^\circ}$$

を得る. $\square$

(補足：O が 3 角形の内部にあることを確認している理由は, O と A が辺 BC に関して互いに逆の側にある場合, 円周角と中心角の関係を直接使えないからである. なお, 一般に鋭角 3 角形の外心は 3 角形の内部にある)



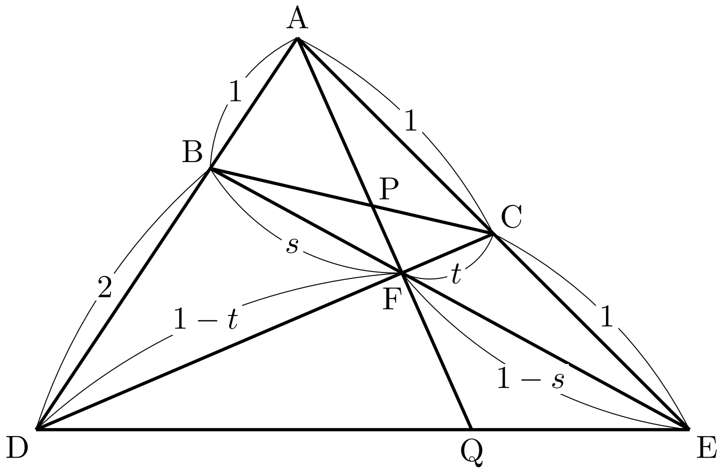
$\boxed{3}$ $\triangle$ABC の辺 AB, AC の延長上に, 点 D, E をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるようにとり, 線分 BE と CD の交点を F とする. また, 直線 AF と線分 BC, DE との交点をそれぞれ P, Q とする. 以下の各問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ.

(3) $\triangle$ADQ の面積は $\triangle$ABP の面積の何倍か. (防衛大・改)

(解) (1) BF : FE $= s : 1-s$, CF : FD $= t : 1-t$ とおく.



このとき, 点 F は線分 BE 上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

である. また, 点 F は線分 CD 上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である. ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立より,

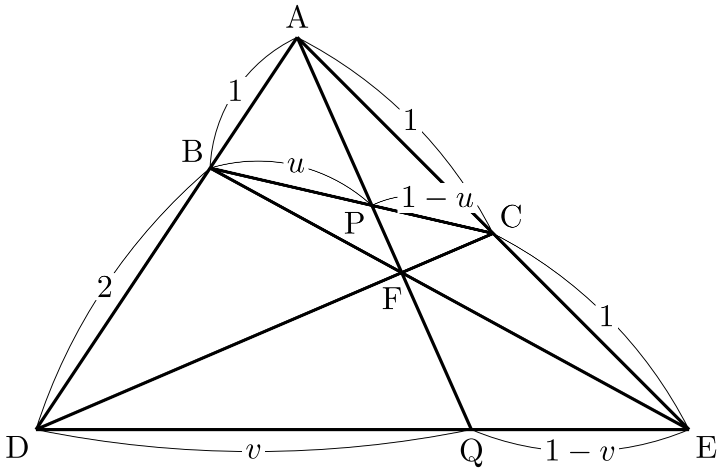
$$1-s=3t,\ 2s=1-t \Leftrightarrow s=\frac{2}{5},\ t=\frac{1}{5}$$

を得る. これを代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\underline{\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

となる. □

(2) BP : PC $= u : 1-u$, DQ : QE $= v : 1-v$ とおく.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より, k を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる. また点 P は線分 BC 上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である. ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より,

$$\frac{3}{5}k=1-u,\ \frac{4}{5}k=u \Leftrightarrow k=\frac{5}{7},\ u=\frac{4}{7}$$

を得る. したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\underline{\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AF}}}$$

となる. 一方で, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より, l を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{5}l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる. また点 Q は線分 DE 上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-v)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+v\overrightarrow{\mathrm{AE}}=3(1-v)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である. 上述の通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立より,

$$\frac{3}{5}l=3(1-v),\ \frac{4}{5}l=2v \Leftrightarrow l=\frac{5}{3},\ v=\frac{2}{3}$$

を得る. したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\underline{\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}}$$

となる. $\square$

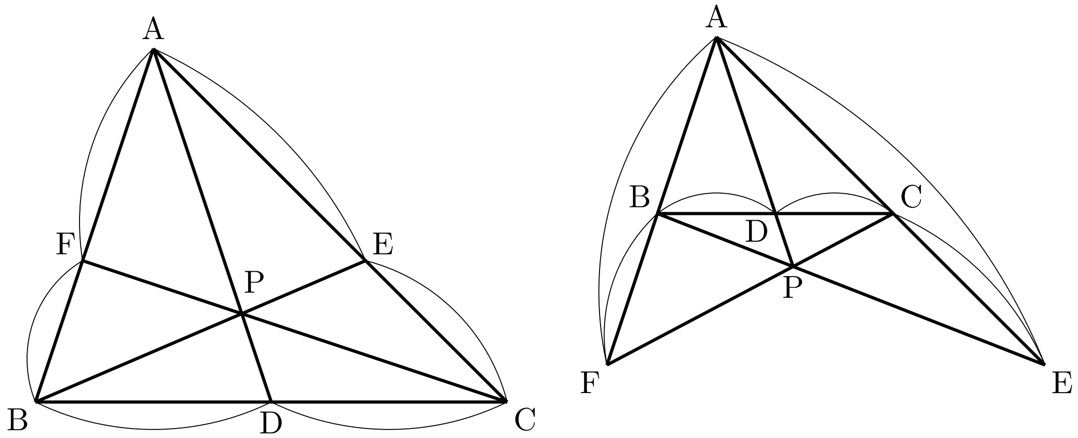
(3) (2) より, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから, AP : PQ = 3 : 4 である. ここで,

$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ADP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\triangle\mathrm{ADQ} = \frac{1}{7}\triangle\mathrm{ADQ}$$

を得る. すなわち, $\triangle\mathrm{ADQ} = 7\triangle\mathrm{ABP}$ より, 7 倍 である. $\square$

(補足：交点の位置ベクトルを求める問題では, 「チェバの定理」や「メネラウスの定理」といった初等幾何的なアプローチも有効である. 以下にこれらの定理の概略と, それによる別解を載せておく.

① チェバの定理 (3 角形と, その 3 辺および延長上にない 1 点に関する定理)

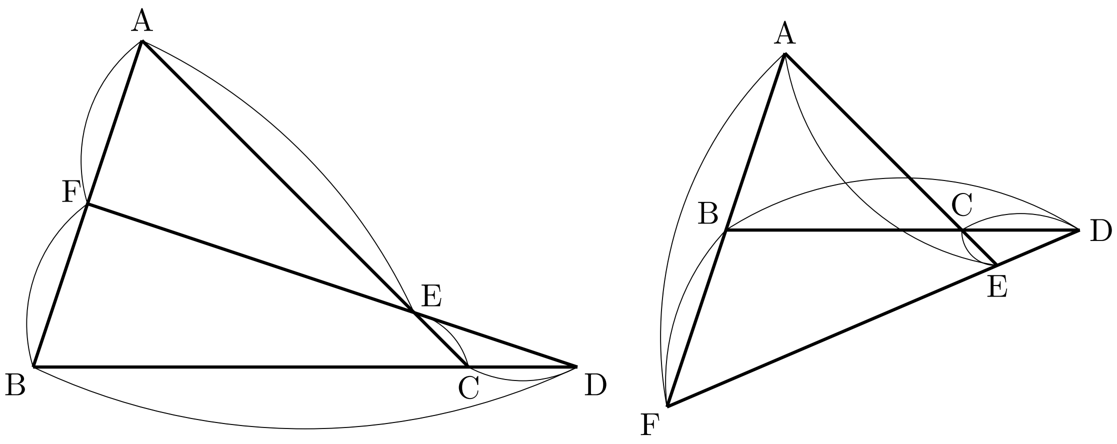


点 P が 3 角形の内部 (左図), 外部 (右図) のいずれにある場合も,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

が成り立つ.

② メネラウスの定理 (3 角形と, 3 頂点を通らない 1 直線に関する定理)



直線 DF が 3 角形の辺と交わる (左図), 交わらない (右図) のいずれの場合も,

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$

が成り立つ.

以上の 2 つの定理の覚え方は「頂点と分点を交互に一筆書き」である. なおこれらの定理は「逆」も成り立つ. 「チェバの定理の逆」は AD, BE, CF が 1 点で交わること, 「メネラウスの定理の逆」は D, E, F が 1 直線上であることが主張となる. これらはそれぞれ共点条件, 共線条件となっている)

(略別解) (1) $\triangle$ADE においてチェバの定理より,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QE}}\cdot\frac{1}{1}=1\Leftrightarrow\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QE}}=\frac{2}{1}$$

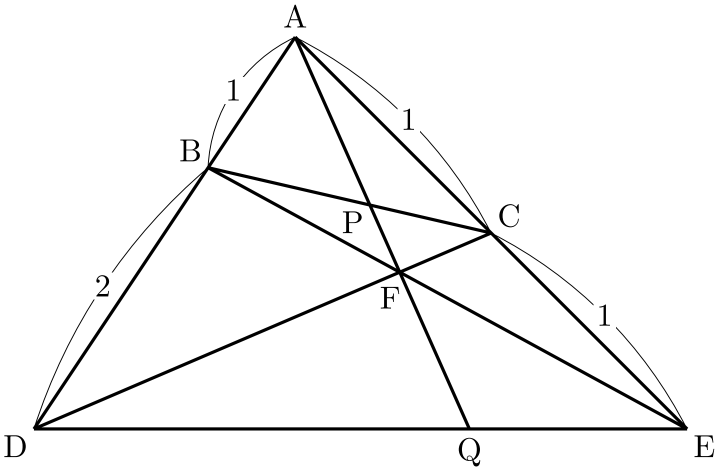
である. すなわち, DQ : QE $=2:1$ である. 一方で, $\triangle$ADQ と直線 BE についてメネラウスの定理より,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EQ}}\cdot\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{FA}}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{FA}}=1\Leftrightarrow\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{FA}}=\frac{2}{3}$$

である. すなわち, AF : FQ $=3:2$ である. ゆえに,

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}++4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\underline{\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

を得る. □

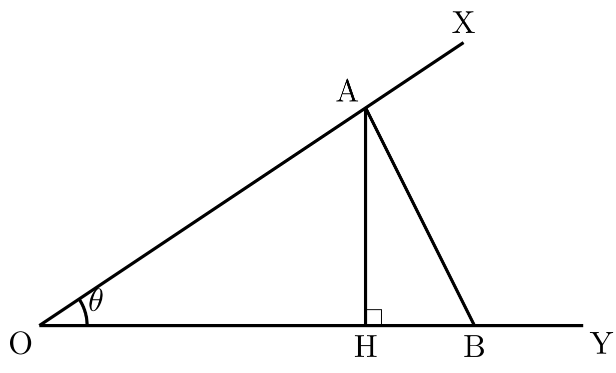


$\boxed{4}$ 以下の各問に答えよ.

(1) 平面上に原点 O から出る相異なる 2 本の半直線 OX, OY ($\angle\mathrm{XOY}<90^\circ$) があり, それぞれの上に O と異なる 2 点 A, B をとる. 点 A から OB 上に下ろした垂線の足を H とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) 鋭角 3 角形 OPQ において, $\mathrm{OP}=3$, $\mathrm{OQ}=4$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=7$ とする. また, 点 P から辺 OQ に下ろした垂線の足を R とする. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を用いて表せ.

(解) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく.



$\cos\theta=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$ であるから,

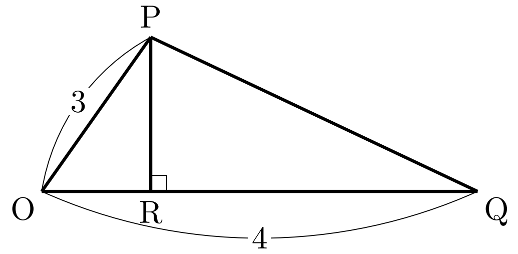
$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

を得る．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{b}$ と平行なので，$\vec{b}$ の単位ベクトルを考えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \underline{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

を得る． □

(2) 条件を図示すると以下の通り．



ここで (1) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{7}{16}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を得る． □

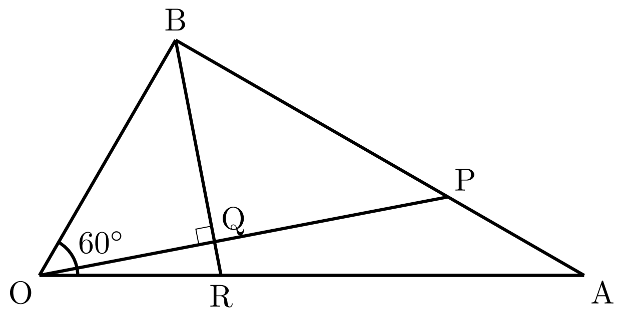
(補足：(1) について，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の上への正射影ベクトル」という．これは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に真上から光を当てたとき，地面 ($\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 上) にできる影のベクトルだと考えることができる．導出の方法と合わせ，公式として頭に入れておくとよい．実用例として，(2) や大問 5 では正射影ベクトルを用いることで計算量を軽減することができる)

$\boxed{5}$ $\triangle$OAB において，OA $=2$, OB $=1$, $\angle$AOB $=60^\circ$ とする．辺 AB を $1:2$ に内分する点を P とし，B から OP に垂線 BQ を引き，BQ の延長と OA との交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，以下の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) OR : RA を求めよ．

(解) 条件を図示すると以下の通り．



AP : PB $=1:2$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ である．図より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の上への正射影ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\vec{b}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2}(2\vec{a}+\vec{b})$$

とできる．ここで，

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=1$$

より,

$$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=21,\quad \vec{b}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$$

であるから, これを上式に代入して, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{7}(2\vec{a}+\vec{b})$ を得る. したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\underline{\frac{2\vec{a}-6\vec{b}}{7}}$$

である. □

(2) s を実数として, $\mathrm{OR}:\mathrm{RA}=s:1-s$ とおく. このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\vec{a}$$

と表せる. また, 線分 R は BQ 上ゆえ, $\dfrac{7}{2}t$ を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\vec{b}+\frac{7}{2}t\cdot\frac{2\vec{a}-6\vec{b}}{7}=t\vec{a}+(1-3t)\vec{b}$$

と表せる. ここで $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので,

$$s=t,\ 0=1-3t\Leftrightarrow s=t=\frac{1}{3}$$

を得る. したがって,

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RA}=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\underline{1:2}$$

を得る. □

(補足：(1) について, 正射影ベクトルの利用に気が付かなくても, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ などとおき, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$ から k を求めることもできる. (2) について, $\dfrac{7}{2}t$ という形で実数を設定したのは, 計算を簡単にするためである. 平行なベクトルは互いに実数倍の関係にあるため, このような処理が可能であることを知っておくと便利である)